

**RECONSTRUCCION DE REFLECTANCIAS ESPECTRALES:
TEOREMA DEL MUESTREO FRENTE A MODELO LINEAL.**

**SPECTRAL REFLECTANCE RECOVERING:
LINEAR MODEL vs. SAMPLING THEOREM.**

A. GARCIA-BELTRAN, J. ROMERO, J. L. NIEVES, F. PEREZ OCON

Departamento de Física Aplicada. Universidad de Granada.

18071 - GRANADA.

RESUMEN

Hemos realizado un estudio comparativo de la bondad en la reconstrucción de curvas de reflectancia espectral según un modelo lineal de pocos parámetros (6 - 8) y por aplicación del teorema de Whittaker-Shanon, suponiéndoles anchos de banda a estas funciones de 0,01 y 0,02 ciclos/nm (7 y 13 parámetros necesarios), tal y como sugieren algunos autores.

Dicho estudio se ha llevado a cabo sobre un conjunto de 114 curvas de reflectancia espectral de muestras Munsell y 13 curvas de reflectancia de azulejos comerciales, todas medidas experimentalmente, así como 14 muestras utilizadas en el cálculo de índices de rendimiento del color; las muestras fueron clasificadas en grupos según su tono. Se observa que la muestras con una mayor contribución en largas longitudes de onda (rojas, amarillas y púrpuras) se dejan reconstruir mejor mediante el modelo lineal que a través del teorema del muestreo, ocurriendo lo contrario para aquellas con menor contribución en estas longitudes de onda (azules y verdes). Aún así, dado que el asignarle un ancho de banda a estas funciones de 0,02 ciclos/nm nos fuerza a la utilización de 13 parámetros (un número bastante elevado) para definir la curva, apostamos por el modelo lineal de pocos parámetros como método más apropiado.

ABSTRACT

We have made a comparative study between a few parameters (6 - 8) linear model and Whittaker-Shanon theorem when using them to recover spectral reflectance functions. As suggested by some authors, we supposed 0.01 and 0.02 cycles/nm bandwidths in sampling theorem recovering. This study was made over 114 Munsell reflectances and 13 commercial glazes tiles, experimentally measured, and 14 samples used for computing color rendering index, all of them clustered by a hue classification. We can observe that, samples with a major

contribution in long wavelengths (reddish, yellowish and purplish ones) are better recovered by a linear model than using the sampling theorem, instead of bluish and greenish ones, that are better recovered using this theorem. Anyway, supposing these functions' bandwidth equal to 0.02 cycles/nm forces us to use 13 parameters (a quite high number) in order to recover spectral reflectance curves, so we bet on linear models as more suitable methods.

INTRODUCCION

Los actuales algoritmos de reconocimiento e identificación del color,^{1,2} así como los modelos de constancia de color,^{3,4,5} exigen la limitación del número de parámetros necesarios para representar tanto a las funciones de distribución espectral de los iluminantes como las curvas de reflectancia espectral de los objetos opacos. Ello es así debido a que tratan de sacar el máximo provecho a la *suavidad* del perfil que presentan estas funciones en la naturaleza.

Los primeros estudios llevados a cabo de forma cuantitativa para tratar de poner de manifiesto esta afirmación fueron realizados por Stiles *et al*: según ellos, la mayoría de las reflectancias superficiales, tras obtener su transformada de Fourier, resultan ser funciones de banda limitada, cuya frecuencia-límite se encuentra entre los 0,01-0,02 ciclos/nm. Buchsbaum

y Gottschalk⁷ demostraron que, colorimétricamente, estas funciones puede aproximarse mediante un modelo lineal de dimensión finita -entre 6 y 12- (siempre puede encontrarse un metámero de la señal en color correspondiente a una función de banda limitada).

En resumen, puede afirmarse que una colección dada de funciones definidas a lo largo del espectro visible, de banda limitada, pueden ser representadas con alto grado de precisión mediante un modelo lineal con dimensionalidad proporcional al límite de la banda⁸, y perfectamente reconstruibles a través del teorema de Whittaker-Shanon.

Nuestra idea fue "enfrentar" estos dos métodos de reconstrucción para tratar de discernir cual de ellos es más apropiado a la hora de representar matemáticamente curvas de reflectancia espectral de objetos opacos. Dicho estudio fue llevado a cabo sobre un conjunto de 114 curvas de reflectancia espectral de muestras Munsell y 13 curvas de reflectancia de azulejos comerciales, todas medidas experimentalmente, así como 14 muestras utilizadas en el cálculo de índices de rendimiento del color; las muestras fueron clasificadas en 5 grupos según su tono: rojos, amarillos, verdes, azules y púrpuras.

METODO

El ámbito de aplicación del Teorema de Whittaker-Shanon (o del Muestreo) se reduce a funciones de espectro o banda limitada: dichas funciones pueden ser reconstruidas

exactamente a partir de sus valores muestreados, si el intervalo de muestreo es suficientemente estrecho. Rigurosamente se ha de plantear en los siguientes términos: tengamos una función real de variable real " $\rho(\lambda)$ " (una reflectancia espectral), definida en el intervalo cerrado y acotado $[\lambda_v, \lambda_R]$ (el espectro visible), continua en dicho intervalo y de banda limitada, con un ancho de banda de " B_λ ". Así podremos reconstruir exactamente la función a partir de los valores de muestreo " $\rho(\lambda_i)$ " según la expresión:

$$\rho(\lambda) = \sum_{i=1}^n [\rho(\lambda_i) \text{sinc}(\lambda - \lambda_v - ih)]$$

donde " h " es el paso del muestreo, y " n ", el número de muestras, siempre que se verifique que:

$$h \leq \frac{1}{2B_\lambda}$$

Claramente, el número de muestras " n " vendrá impuesto por el cociente entre la anchura del intervalo donde está definida la función y el paso de muestreo (suponiendo el espectro visible definido entre 400-700 nm, y un ancho de banda de 0,02 ciclos/nm, el número de muestras necesario resulta ser 13); además

$$\rho(\lambda_i) = \rho(\lambda_v + ih)$$

Un estudio previo sobre la colección de muestras, nos llevó a la conclusión de que no se puede afirmar estrictamente que sean funciones de banda limitada, si bien el perfil de su transformada de Fourier se amortigua casi por completo a partir de los 0,02 ciclos/nm.

En cuanto al modelo lineal, generamos nuestras propias bases de reflectancias para cada uno de los grupos tonales antes mencionados,^{9,10} siguiendo un método análogo al de Parkkinen *et al*,¹¹ consistente fundamentalmente en un análisis de componentes principales realizado sobre el total de muestras de cada grupo.

RESULTADOS Y DISCUSION

A fin de poder comparar la bondad de la reconstrucción de las curvas de reflectancia, definimos un coeficiente de bondad en el ajuste (*CBA*) en la siguiente forma:

$$CBA \equiv \frac{\sum_{i=1}^{31} [\rho(\lambda_i) - \rho_a(\lambda_i)]^2}{\sum_{i=1}^{31} [\rho(\lambda_i)]^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_i = (390 + i \cdot 10) \text{ nm} \\ 1 \leq i \leq 31 \end{array} \right.$$

donde " $\rho_a(\lambda)$ " es la reconstrucción, a partir de un determinado número de parámetros, de la curva en cuestión " $\rho(\lambda)$ ".

	4 Vct	6 Vct	8 Vct	10 Vct	0,01 c/nm	0,02 c/nm
Rojos	0,9929	0,9971	0,9971	0,9985	0,9918	0,9967
Amarillos	0,9906	0,9962	0,9976	0,9985	0,9903	0,9977
Verdes	0,9808	0,9848	0,9878	0,9927	0,9891	0,9983
Azules	0,9769	0,9893	0,9961	0,9972	0,9929	0,9981
Púrpuras	0,9844	0,9909	0,9958	0,9970	0,9854	0,9944

Tabla I.- CBA medio para las reconstrucciones de cada grupo tonal, utilizando 4, 6, 8 y 10 vectores del modelo lineal, y 0,01 y 0,02 ciclos/nm de frecuencia límite.

La Tabla I muestra los valores medios de dicho CBA en cada grupo tonal utilizando un modelo lineal con determinado número de vectores, y el teorema del muestreo para dos anchos de banda distintos, 0,01 y 0,02 ciclos/nm. Como se puede observar, son los grupos tonales *rojo*, *amarillo* y *púrpura* (mayor contribución de las longitudes de onda largas en el perfil de la curva de reflectancia espectral) los que mejor se dejan reconstruir mediante un modelo lineal: por término medio, en el grupo de los rojos con 4 vectores de la base se consigue un ajuste mejor que utilizando el teorema del muestreo suponiendo a las reflectancias una frecuencia límite de 0,01 ciclos/nm (7 parámetros), y con 6 vectores se supera el ajuste realizado mediante dicho teorema y una frecuencia límite de 0,02 ciclos/nm (13 parámetros).

Las Tablas II-VI presentan el porcentaje de reconstrucciones que superan un determinado CBA, tanto utilizando diverso número de vectores en el modelo lineal, como distinta frecuencia límite para el teorema del muestreo.

ROJOS	0,9900	0,9925	0,9950	0,9975	0,9990
3 Vectores	60,6%	47,4%	31,6%	7,9%	2,7%
4 Vectores	73,7%	68,4%	60,6%	42,1%	28,9%
5 Vectores	78,3%	78,3%	66,4%	42,1%	28,9%
6 Vectores	89,5%	84,2%	78,9%	65,8%	44,7%
7 Vectores	94,7%	89,5%	81,6%	71,8%	52,6%
8 Vectores	94,7%	94,7%	84,2%	72,0%	57,9%
0,01 c/nm	75,0%	36,1%	16,7%	--	--
0,02 c/nm	100,0%	100,0%	88,9%	36,1%	--

Tabla II.- Porcentaje de reconstrucciones en el grupo tonal rojo que superan un determinado CBA.

AMARILLOS	0,9900	0,9925	0,9950	0,9975	0,9990
3 Vectores	56,8%	34,0%	16,9%	11,2%	2,3%
4 Vectores	81,8%	65,9%	47,7%	34,0%	18,2%
5 Vectores	90,9%	75,0%	65,9%	43,2%	27,3%
6 Vectores	90,9%	86,4%	81,8%	64,6%	31,8%
7 Vectores	90,9%	86,4%	81,8%	68,8%	34,0%
8 Vectores	100,0%	100,0%	90,9%	70,5%	40,9%
0,01 c/nm	71,8%	61,5%	38,5%	5,1%	--
0,02 c/nm	100,0%	100,0%	100,0%	64,1%	5,1%

Tabla III.- Porcentaje de reconstrucciones en el grupo tonal amarillo que superan un determinado CBA.

VERDES	0,9900	0,9925	0,9950	0,9975	0,9990
3 Vectores	22,2%	13,3%	--	--	--
4 Vectores	60,0%	51,1%	35,5%	31,1%	11,1%
5 Vectores	62,2%	51,1%	35,5%	31,1%	17,8%
6 Vectores	66,7%	57,8%	48,9%	31,1%	26,7%
7 Vectores	68,9%	60,0%	51,1%	31,1%	26,7%
8 Vectores	68,9%	60,0%	55,6%	33,3%	28,9%
0,01 c/nm	63,4%	58,5%	48,8%	26,8%	--
0,02 c/nm	100,0%	97,6%	82,9%	82,9%	43,9%

Tabla IV.- Porcentaje de reconstrucciones en el grupo tonal verde que superan un determinado CBA.

AZULES	0,9900	0,9925	0,9950	0,9975	0,9990
3 Vectores	36,2%	34,0%	31,8%	9,1%	2,3%
4 Vectores	46,6%	43,2%	40,9%	22,7%	6,8%
5 Vectores	54,5%	55,3%	55,3%	43,2%	35,6%
6 Vectores	68,1%	59,1%	59,1%	45,5%	38,6%
7 Vectores	81,8%	75,0%	63,6%	53,3%	38,6%
8 Vectores	84,1%	81,8%	75,0%	65,9%	45,5%
0,01 c/nm	87,5%	75,0%	37,5%	20,0%	--
0,02 c/nm	96,0%	92,5%	92,5%	82,5%	56,0%

Tabla V.- Porcentaje de reconstrucciones en el grupo tonal azul que superan un determinado CBA.

PURPURAS	0,9900	0,9925	0,9950	0,9975	0,9990
3 Vectores	46,9%	43,8%	31,3%	21,9%	9,4%
4 Vectores	56,3%	43,8%	34,4%	31,3%	21,9%
5 Vectores	56,3%	50,0%	43,8%	31,3%	25,6%
6 Vectores	59,4%	56,3%	50,0%	40,6%	31,3%
7 Vectores	68,8%	65,3%	59,4%	53,1%	50,0%
8 Vectores	84,4%	84,4%	71,9%	53,1%	50,0%
0,01 c/nm	68,8%	34,4%	25,0%	15,6%	--
0,02 c/nm	90,6%	87,5%	81,3%	53,1%	15,6%

Tabla VI.- Porcentaje de reconstrucciones en el grupo tonal púrpura que superan un determinado CBA.

La Tabla VII representa el porcentaje de reconstrucciones mediante el modelo lineal cuyo CBA supera al de la reconstrucción mediante el teorema del muestreo, utilizando un menor número de parámetros.

Todo ello deja de manifiesto lo antes mencionado: en los grupos tonales *rojo*, *amarillo* y *púrpura*, las muestras se dejan reconstruir mejor mediante un modelo lineal que vía teorema del muestreo; por el contrario, en los grupo tonales *verde* y *azul*, el teorema del muestreo permite una mejor reconstrucción de dichas curvas que un modelo lineal. Ello se debe a que en los primeros, la mayor contribución de largas longitudes de onda en el perfil de las funciones (curvas tipo "escalón") impide que su frecuencia límite se encuentre entre dichos valores, con lo que la aplicación del teorema no permita una reconstrucción tan buena

como en el caso de las reflectancias de los grupos verde y azul (curvas tipo "campana", con poca contribución de largas longitudes de onda).

De todas formas, si el criterio de bondad de la reconstrucción fuese exclusivamente colorimétrico, la tolerancia de color y los umbrales de discriminación cromática reducirían el número de parámetros.

Por otro lado, los actuales modelos de constancia del color^{3,4,5}, que tratan de sacar partido de los métodos de reconstrucción de reflectancias con pocos parámetros, no han podido solventar el problema del pequeño número de clases de fotorreceptores del sistema visual humano, ya que esto nos fuerza a la búsqueda de sistemas de representación de reflectancias de menos de 4 parámetros.

	0,01 c/nm (7 parámetros)	0,02 c/nm (13 parámetros)
Grupo Rojo	91,7%	80,6%
Grupo Amarillo	87,8%	73,2%
Grupo Verde	55,0%	25,0%
Grupo Azul	55,0%	27,5%
Grupo Púrpura	68,8%	46,9%

Tabla VII.- Porcentaje de reconstrucciones mediante el modelo lineal cuyo CBA supera al de la reconstrucción mediante el teorema del muestreo, utilizando un menor número de parámetros.

"AGRADECIMIENTOS.- Este trabajo de investigación ha sido financiado por la D.G.I.C.Y.T., Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto nº PB91-0717."

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS:

1. B. A. WANDELL: *I.E.E.E. PAMI-9*, 2-13, (1987).
2. SHAFER: *Color Res. & Appl.*, 10, 210-218, (1985).
3. L. T. MALONEY, B. A. WANDELL: *J.Opt.Soc.Am. A*, 3, 29-33, (1986).
4. B. A. WANDELL: *Physica Scripta*, 39, 187-192, (1989).
5. M. D'ZMURA: *J.Opt.Soc.Am. A*, 9, 490-493, (1992).
6. W. S. STILES, G. WYSZECKI, N. OTHA: *J.Opt.Soc.Am.*, 67, 779-784, (1977).
7. G. BUCHSBAUM, A. GOTTSCHALK: *J.Opt.Soc.Am. A*, 1, 885-887, (1984).
8. L. T. MALONEY: *J.Opt.Soc.Am. A*, 3, 29-33, (1986).
9. J. ROMERO, A. GARCIA-BELTRAN, L. JIMENEZ DEL BARCO: *Opt. Pur. Apl.*, 24, 1-9, (1991).
10. J. ROMERO, A. GARCIA-BELTRAN, L. JIMENEZ DEL BARCO, J. A. GARCIA: *J. Optics*, (en prensa).
11. J. P. S. PARKKINEN, J. HALLIKAINEN, T. JAASKELAINEN: *J.Opt.Soc.Am. A*, 6, 318-322, (1989).

★ ★ ★